



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 17 februarie 2024

Clasa a VIII-a

## BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

## Problema 1

- a) Arătați că numărul  $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2025}}$  este natural.
- b) Demonstrați că  $\frac{1}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{1})} + \frac{1}{\sqrt{15} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1} \cdot (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} < \frac{1}{2}$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**OBS. Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător !!!**

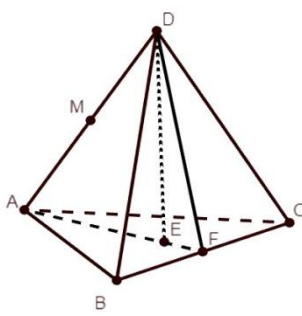
SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
a) Raționalizând fiecare fracție, obținem succesiv: $A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2023}}{2} =$		2 p
$= \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{1}}{2} = \frac{45 - 1}{2} = 22 \in \mathbb{N}.$		2 p
b) Transformând termenul general al sumei vom avea, pentru fiecare $k = \overline{1; n}$ : $\frac{1}{\sqrt{4k^2 - 1} \cdot (\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})} = \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{2\sqrt{(2k+1)(2k-1)}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right).$		2 p
Sumând egalitățile de tipul anterior se obține că membrul stâng al inegalității de demonstrat este egal cu $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$ . Concluzia rezultă acum imediat.		1 p

## Problema 2

În tetraedrul  $ABCD$  muchiile opuse sunt congruente, două câte două.

- Demonstrați că ariile celor patru fețe ale tetraedrului sunt egale.
- Arătați că  $m(\angle ABD) + m(\angle CBD) + m(\angle ABC) = 180^\circ$ .
- Dacă, în plus,  $AD \perp BC$ , atunci arătați că  $AD \perp (BCM)$ , punctul  $M$  fiind mijlocul laturii  $AD$ .

**OBS. Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător !!!**

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
a) Avem $AB = CD$ , $BC = DA$ și $DB = AC$ , deci $\triangle ABC \equiv \triangle CDA \equiv \triangle DCB \equiv \triangle BAD$ (L.L.L.). Prin urmare $A_{ABC} = A_{CDA} = A_{DCB} = A_{BAD}$ .		2 p
b) Din congruența de la punctul anterior rezultă $\angle ABD \equiv \angle BAC$ și $\angle CBD \equiv \angle BCA$ . Deci $m(\angle ABD) + m(\angle CBD) + m(\angle ABC) = m(\angle BAC) + m(\angle BCA) + m(\angle ABC) = 180^\circ$ .		1 p
		1 p
Fie $DE \perp (ABC)$ , cu $E \in (ABC)$ și $EF \perp BC$ , $F \in (BC)$ . Cum $BC \subset (ABC)$ , din Teorema celor 3 perpendiculare, rezultă $DF \perp BC$ . Cum $BC \perp AD$ și $BC \perp DF$ , deducem că $BC \perp (ADF)$ , de unde obținem $BC \perp AF$ . Prin urmare punctele $A$ , $E$ și $F$ sunt coliniare.		1 p
Deci $AF$ și $DF$ sunt înălțimi în triunghiurile congruente $ABC$ și $DCB$ și pleacă din vârfurile congruente $A$ și respectiv $D$ , așadar sunt congruente. Rezultă $(AF) \equiv (DF)$ , adică triunghiul $ADF$ este isoscel și, prin urmare, $FM$ este și mediană și înălțime în triunghiul $ADF$ . Așadar $AD \perp MF$ , $AD \perp BC$ , de unde concluzionăm că $AD \perp (BMC)$ .		2 p
<b>SOLUȚIE ALTERNATIVĂ pentru punctul c)</b>		
Dacă $N$ este mijlocul muchiei $[BC]$ , vom arăta că $MN$ este perpendiculara comună a dreptelor $AD$ și $BC$ . Din $\triangle BAD \equiv \triangle CDA$ rezultă că medianele din vârfurile respectiv congruente $B$ și $C$ vor fi congruente, deci $BM = CM$ și cum $N$ este mijlocul lui $[BC]$ deducem că $MN \perp BC$ . Analog se arată că $NM \perp AD$ . Așadar relația $AD \perp BC$ plus $NM \perp AD$ conduc la $AD \perp (BC; MN) = (BCM)$ ; analog, din $AD \perp BC$ și $MN \perp BC$ , deducem că $BC \perp (AND)$ , ca posibilă cerință suplimentară.		3 p

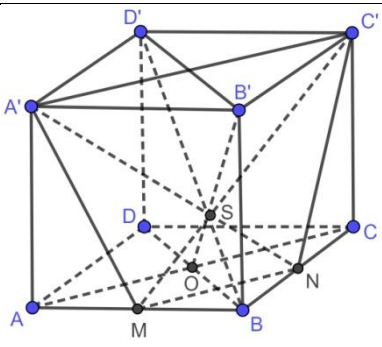
### Problema 3

Se consideră cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , centrul  $O$  al feței  $ABCD$ , iar punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele muchiilor  $AB$ , respectiv  $BC$ . Arătați că:

- a) dreptele  $D'B$ ,  $A'N$ ,  $C'M$  și  $B'O$  sunt concurente;  
b) patrulaterul  $MNC'A'$  are diagonalele perpendiculare.

S.G.M. nr.10 / 2023

**OBS. Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător !!!**

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
<p>a) <math>MN</math> este l.m. în triunghiul <math>ABC</math>, deci <math>MN \parallel AC</math> și <math>2MN = AC</math> și cum <math>AC \parallel A'C'</math> și <math>(AC) \equiv (A'C')</math> rezultă <math>MN \parallel A'C'</math> și <math>2MN = A'C'</math>. Prin urmare <math>A'N</math> și <math>C'M</math> sunt coplanare, iar dacă <math>\{S\} = A'N \cap C'M</math>, din asemănarea triunghiurilor <math>MNS</math> și <math>C'A'S</math> deducem că raportul de asemănare este</p> $\frac{MS}{SC'} = \frac{NS}{SA'} = \frac{MN}{A'C'} = \frac{1}{2}. \quad (1)$		2 p
<p>Similar <math>ON</math> este l.m. în triunghiul <math>ABC</math>, deci <math>ON \parallel AB</math> și <math>2ON = AB</math> și cum <math>AB \parallel A'B'</math> și <math>(AB) \equiv (A'B')</math> rezultă <math>ON \parallel A'B'</math> și <math>2ON = A'B'</math>.</p> <p>Deci <math>A'N</math> și <math>B'O</math> sunt coplanare, iar dacă <math>\{S'\} = A'N \cap B'O</math>, din <math>\triangle NOS' \sim \triangle A'B'S'</math> deducem</p> $\frac{OS'}{S'B'} = \frac{NS'}{S'A'} = \frac{NO}{A'B'} = \frac{1}{2}. \quad (2)$ <p>Din (1) și (2) rezultă <math>S = S'</math>, adică <math>A'N \cap C'M \cap B'O = \{S\}</math> și <math>\frac{MS}{SC'} = \frac{NS}{SA'} = \frac{OS}{SB'} = \frac{1}{2}. \quad (3)</math></p>		2 p
<p>Analog <math>BO \parallel B'D'</math> și <math>2BO = B'D'</math>, deci <math>BO</math> și <math>B'D'</math> sunt coplanare, iar dacă <math>\{S''\} = BD' \cap B'O</math>, din asemănarea triunghiurilor <math>BOS''</math> și <math>D'B'S''</math>, deducem că <math>\frac{BS''}{S''D'} = \frac{OS''}{S''B'} = \frac{BO}{D'B'} = \frac{1}{2}</math>. De aici și din relația</p> $(3) \text{ rezultă că } S = S'' \text{ și } \frac{MS}{SC'} = \frac{NS}{SA'} = \frac{OS}{SB'} = \frac{BS}{SD'} = \frac{1}{2}, \quad (4)$ <p>de unde concluzionăm că <math>A'N \cap C'M \cap B'O \cap D'B = \{S\}</math>.</p>		1 p
<p>Vom arăta că lungimile laturilor triunghiului <math>A'MS</math> sunt numere pitagorice. Dacă <math>l</math> este lungimea muchiei cubului, din triunghiul dreptunghic <math>AA'M</math> obținem <math>A'M^2 = \frac{5l^2}{4}</math>; avem și <math>AN^2 = \frac{5l^2}{4}</math>, din triunghiul dreptunghic <math>ANB</math>, deci rezultă <math>A'N = \frac{3l}{2}</math> și cum <math>\frac{SN}{A'S} = \frac{1}{2}</math> obținem <math>A'S = \frac{2}{3} A'N = l</math>.</p> <p>Analog <math>SM = \frac{1}{3} C'M = \frac{1}{3} A'N = \frac{l}{2}</math>. În final <math>A'S^2 + SM^2 = l^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{5l^2}{4} = A'M^2</math>, așadar <math>A'N \perp C'M</math>.</p>		2 p



#### Problema 4

Determinați numerele reale pozitive  $x, y$  și  $z$  astfel încât să aibă loc simultan relațiile:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2(x^2 + y^2) + y^2(y^2 + z^2) + z^2(z^2 + x^2) = 6xyz \end{cases}$$

**OBS. Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător !!!**

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
Folosind prima relație, cea de-a doua ecuație devine succesiv: $x^2(x^2 + y^2) + y^2(y^2 + z^2) + z^2(z^2 + x^2) = 2xyz(x + y + z) \Leftrightarrow$ $(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 = 0.$		3 p
De aici rezultă că $\begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \\ z^2 = xy \end{cases}$ . Însușind aceste relații obținem $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ , adică		1 p
$\frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] = 0$ , de unde deducem că $x = y = z$ .		2 p
Folosind acum prima ecuație concluzionăm că $x = y = z = 1$ .		1 p
SOLUȚIE ALTERNATIVĂ		
Din a doua relație obținem succesiv: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 6xyz + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \Leftrightarrow$ $\left[ \left( \underbrace{x + y + z}_{=3} \right)^2 - 2(xy + yz + zx) \right]^2 = 6xyz + (xy + yz + zx)^2 - 2xyz \left( \underbrace{x + y + z}_{=3} \right) \Leftrightarrow$ $[9 - 2(xy + yz + zx)]^2 = (xy + yz + zx)^2 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 3.$		5 p
Deoarece avem $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} = 3$ , cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$ , și cum $x + y + z = xy + yz + zx = 3$ , rezultă de aici că trebuie să avem egalitate în inegalitatea (1), ceea ce conduce la $x = y = z$ , și, cum suma lor e 3, concluzionăm că $x = y = z = 1$ .		2 p